丛书序言

2002 年 8 月,我国数学界在北京成功地举办了第 24 届国际数学家大会. 这是第一次在一个发展中国家举办的这样的大会. 为了迎接大会的召开,北京数学会举办了多场科普性的学术报告会,希望让更多的人了解数学的价值与意义. 现在由科学出版社出版的这套小丛书就是由当时的一部分报告补充、改写而成.

数学是一门基础科学. 它是描述大自然与社会规律的语言,是科学与技术的基础,也是推动科学技术发展的重要力量. 遗憾的是,人们往往只看到技术发展的种种现象,并享受由此带来的各种成果,而忽略了其背后支撑这些发展与成果的基础科学. 美国前总统的一位科学顾问说过:“很少有人认识到,当前被如此广泛称颂的高科技,本质上是数学技术”.

在我国,在不少人的心目中,数学是研究古老难题的学科,数学只是为了应试才要学的一门学科. 造成这种错误印象的原因很多. 除了数学本身比较抽象,不易为公众所了解之外,还有学

校数学中不适当的方式与要求、媒体不恰当的报道等等.但是,从我们数学家自身来检查,工作也有欠缺,没有到位.向社会公众广泛传播与正确解释数学的价值,使社会公众对数学有更多的了解,是我们义不容辞的责任.因为数学的文化生命的位置,不是积累在库藏的书架上,而应是闪烁在人们的心灵里.

20 世纪下半叶以来,数学科学像其他科学技术一样迅速发展.数学本身的发展以及它在其他科学技术的应用,可谓日新月异,精彩纷呈.然而许多鲜活的题材来不及写成教材,或者挤不进短缺的课时.在这种情况下,以讲座和小册子的形式,面向中学生与大学生,用通俗浅显的语言,介绍当代数学中七彩的话题,无疑将会使青年受益.这就是我们这套丛书的初衷.

这套丛书还会继续出版新书,我们诚恳地邀请数学家同行们参与,欢迎有合适题材的同志踊跃投稿.这不单是传播数学知识,也是和年青人分享自己的体会和激动.当然,我们的水平有限,未必能完全达到预期的目标.丛书中的不当之处,也欢迎大家批评指正.

姜伯驹

2007 年 3 月

序　言

这本书是写给大学生的一本数学通俗读物. 其目的是以函数的迭代为模型,向读者介绍什么是浑沌和分形,以及研究它们的意义. 具有微积分基本知识的读者均可读懂它的主要内容.

在 20 世纪 60 年代,Lorenz 在研究大气流动时发现了奇异吸引子的现象. 它告诉人们在一个确定性的系统中可能存在着某种不可预测的行为,后来人们把这类混乱和无序的现象称为浑沌(chaos). 分形(fractal)是指一类复杂而不规则的图形,其 Hausdorff 维数大于其拓扑维数. 随着非线性科学的兴起,近几十年来浑沌与分形广泛地出现在许多领域,如天体力学、宇宙学、热力学、生命科学、流体力学、材料科学及各种应用科学. 浑沌与分形这两个词汇成为种种非线性科学中的一种语言,并成为理解非线性过程中复杂现象的一条途径. 然而,对于大多数非数学专业的工作者而言,人们对于这两个时髦的名词充满着好奇、迷惑和某种神秘感. 通过一个简单的数学

模型,来解释浑沌与分形的确切含义以及它们是怎样形成的,就是本书写作的初衷.

如果抛开具体的物理现象不谈,单从数学上看,浑沌与分形的产生并不是一种很特别的事:一个简单的二次式的迭代就可能导致浑沌与分形.早在1920年前后,数学家Fatou与Julia就系统地研究了复的多项式或有理函数的迭代.他们彼此独立地对这种复迭代在其不稳定集合(后来人们称之为Julia集)上的行为作了完整深刻的刻画.根据他们的研究结果,复迭代在其Julia集合上的复杂行为实际上就是当今被广泛谈论的浑沌.在他们的研究工作的60年之后,Julia集被人们用电子计算机画成了图形.这些Julia集的图形出人意外的复杂和多样,并且十分美丽.绝大多数Julia集的图形都是分形,现在成了分形理论中的"经典"例子.这样,在20世纪80年代初,在D. Sullivan等人工作的影响下,关于复迭代的研究一下子又热乎起来,吸引了不少数学家进一步研究,并取得了重要进展.

这本小册子共分4章.第1章讨论关于一般映射的迭代,介绍什么是浑沌,通过若干简单实例介绍非线性迭代怎样导致浑沌.第2章介绍Fatou与Julia关于复迭代的基本结果及Sullivan

的定理. 第 3 章阐述分形的定义和 Hausdorff 维数的计算. 第 4 章讨论与二次迭代有深刻联系的 Mandelbrot 集合，介绍 Douady 与 Hubbard 的研究结果和尚未解决的问题.

作者过去曾以同样的题目多次向大学生作过通俗的演讲. 本书是在讲稿的基础上补充而成. 我们的重点依旧是放在对基本概念与重要结论的阐述上. 与教材和专著不同，它不追求理论上的完整和形式的严谨. 我们将不得不省略某些较深的定理的形式证明，以保证本书有较强的可读性.

每一章后面作者建议了一些练习，其中包括一些计算机绘图. 通过这些练习，读者将会对书中提到的理论有更具体的理解.

李　忠

2005 年 3 月于北京大学

目　　录

1 为什么要研究迭代

我们先从一般映射的迭代讲起.映射的迭代是一个有着广泛应用背景的数学模型,有重要研究价值.一个非线性函数的迭代可能导致出人意外的某种复杂的现象,这便是人们所说的浑沌.本章的主要目的在于解释为什么要研究迭代,并通过若干实例说明什么是浑沌以及浑沌在迭代中是怎样形成的.

§1 迭代及其轨道

在中学里我们经常遇到的序列是等差序列

$$a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \cdots \tag{1.1}$$

和等比序列

$$a_0, a_0q, a_0q^2, \cdots. \qquad (1.2)$$

这两个序列的共同之处则是，自第 2 项开始，每一项都是对其前一项作同一种运算(或加 d，或乘以 q)而得来. 这种不断重复同一种运算的算法就是迭代.

在大学微积分学中，我们遇到过牛顿求根序列：

$$x_{n+1} = x_n - P(x_n)/P'(x_n) \qquad (1.3)$$

$$n = 0, 1, \cdots,$$

其中 $P(xn)$是一个多项式. 在一定的条件下，由(1.3)确定的序列$\{x_n\}$的极限就是多项式$P(x)$的根. 例如，当 $P(x)$是二次式 x^2-2 时，迭代关系式就是

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} \quad n = 0, 1, \cdots,$$

也即

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \quad n = 0, 1, \cdots. \qquad (1.4)$$

读者可以自己证明，任意取一个值 $x_0 \neq 0$ 作为初始值，由(1.4)所决定的序列的极限一定是$\sqrt{2}$，即 $x^2-2=0$ 的根.

我们现在把上述这些例子一般化.

设 $f: A \to A$ 是集合 A 到自身的一个映射，其中集合 A 可以是某个实数集合或复数集合. 这个映射的一个特点是它将集合 A 映入自身. 这样,我们可以考虑 f 对自己的复合映射:

$$p \mapsto f(f(p)), \quad \forall p \in A.$$

今后我们将这个复合映射记作 $f^2: A \to A$. 这里请读者留意,这里的 f^2 只是映射的一个记号，而不是 f 的函数值的平方. 例如 $f(x)=\sin x$ 时,$f^2(x)=\sin(\sin x)$.

对于映射 $f^2: A \to A$ 又可以复合以 f 而得到一个新映射: $p \mapsto f(f^2(p)), \forall p \in A$,并记之 $f^3: A \to A$. 如此下去,我们便得到一个映射的序列

$$f, f^2, f^3, \cdots, f^n, \cdots,$$

其中 $f^{n+1}=f(f^n), n=1,2,\cdots$. 为了方便,我们将映射 $f: A \to A$ 记作 $f^1: A \to A$;并且约定,A 集合到自身的恒同映射: $p \mapsto p$ 记作 f^0: $A \to A$. 这样,我们便由给定的映射 $f: A \to A$ 得到了一个完整的映射序列

$$f^0, f^1, f^2, \cdots, f^n, \cdots, \tag{1.5}$$

其中 $f^{n+1}=f(f^n), n=0,1,\cdots$. 这个序列称为由 f 生成的**迭代序列**.

设 $\{f^n: A \to A \mid n=0,1,\cdots\}$ 是 f 生成的一

个迭代序列. 对于任意一点 $x_0 \in A$, 数列 $\{f^n(x_0) \mid n=0,1,\cdots\}$称作 x_0 的**轨道**. 很容易看出,等差序列(1.1)就是$f(x)=x+d$ 的迭代序列的 a_0 的轨道. 类似地,将$f(x)$换成 qx 时我们便得到等比序列(1.2).

取 $f(x)=x-P(x)/P'(x)$时,它所生成的迭代序列就是牛顿求根序列.

§2 Logistics 方程

为什么要研究迭代呢? 因为它是许多实际事物的一个数学模型. 前面我们已经看到了,牛顿近似求根法就是一个典型的迭代方法. 下面我们再举一个例子.

19 世纪初在西方曾经流行过 Malthus 人口论. 它断言一个地区的人口将以几何级数增长,而该地区的粮食则以算术级数增长. 大家知道,几何级数的增长速度远远大于算术级数的增长速度. 在这种情况下,有人便依据这种理论认为,战争与瘟疫是不可避免的.

后来人们有了更长时间的统计资料,证明人口的演变并非像 Malthus 所说按照几何级数

增长. 人口的演变依赖于许多复杂因素,特别是环境的因素,而 Malthus 的模型没有考虑环境因素. 1845 年荷兰数学家 Verhulst 对于 Malthus 的人口模型作了重要修正,并研究了一般种群数量的模型. 他认为在某个特定环境下一个种群的数量可以用下列迭代方程

$$x_{n+1}=ax_n(b-x_n) \tag{1.6}$$

来描述,其中 x_n 代表该种群在第 n 代(或第 n 个单位时间)的数量. 人们称(1.6)为 logistics 方程. 这个迭代模型已被深入地研究,并有着广泛的应用,比如用它来研究与预报某个地区中某类昆虫的数量,或实验室中一个器皿里某类细菌的数量. 这里 logistics 一词的原意是后勤供应. 为什么把(1.6)称作后勤方程呢? 让我们仔细分析一下这个方程.

迭代方程(1.6)告诉我们,由 x_n 决定 x_{n+1} 时要由两个因子决定,一个是因子 ax_n,另一个因子是$(b-x_n)$. 第一个因子的作用是告诉人们在忽略其他因素时,种群数量会按照一定比例增大. 而第二个因子则反映了种群的环境,特别是供应状况,对种群数量的影响. 这里的基本假定是种群环境的供应总量是固定的. 比如草原上的羊群,每年草原提供羊群的草的总量是一

样的．当第n代种群数量x_n比前一代增大时，对资源消耗就增大，因而不利于群种的繁殖．反映在迭代方程上，x_n增大，则$b-x_n$减小，限制了x_{n+1}的增长速度．

logistics方程不是一个理论推导的结果，而是一个根据种种统计资料得来的经验的公式，而其中的常数a与b要由所考察的种群的具体统计数据决定．

现在让我们注意一个重要事实：Malthus人口论中所说的人口数量与粮食产量的数学模型是一个线性函数的迭代，而logistics方程却是一个非线性函数的迭代，其中的生成函数是$f(x)=ax(b-x)$．

线性函数的迭代，其轨道的性质是十分简单的．而非线性函数的迭代，哪怕迭代函数是一个二次式，其轨道行为可能会变得十分复杂的．我们会在以后的章节中看到这一点．

§3　什么是动力系统

一个映射的迭代序列实际上是一种**离散的动力系统**．

现在我们来介绍什么是动力系统.

动力系统是英文 dynamical systems 的中文翻译. 动力系统的概念最早是由法国著名数学家 Poincaré 在研究三体问题时提出来的.

粗略地说,动力系统是指一个这样的系统,它在任一个时刻的状态都完全决定了此后任意时刻 t 时状态. 比如日、月、地球三体的相对位置,如果忽略掉其他星球的影响的话,就形成了一个动力系统. 一般地说,它们现在的状态完全决定了它们在 t 时刻后的状态.

现在我们导出动力系统的形式定义.

我们用 Ω 表示一个系统的全部状态的集合,用$F(t,X)$表示任意一个状态 X 在 t 时刻的状态. 那么显然我们有

$$F(0,X)=X,\quad \forall X\in\Omega. \tag{1.7}$$

现在假定所讨论的系统是动力系统,我们考虑任意时刻 t_1,这时初始状态 X 变为 $X_1=F(t_1,X)$. 那么, X_1 在 t_2 时刻后就会变为 $X_2=F(t_2,X_1)$. 根据时间对系统的决定性的要求, X_2 应该是初始状态 X 在 t_1+t_2 时刻的状态,也即 $F(t_2,X_1)=F(t_1+t_2,X)$. 将 $X_1=F(t_1,X)$ 代入后即有

$$F(t_2,F(t_1,X))=F(t_1+t_2,X),\quad \forall X\in\Omega. \tag{1.8}$$

这样我们得到了下述动力系统定义.

设 Ω 是 m 维欧氏空间中的一个集合,又设 T 是一个加法意义下的半群. 假定 F: $T\times\Omega\to\Omega$ 是 $T\times\Omega$ 到 Ω 的一个连续映射,并且 $F(t,X)$ 满足(1.7)与(1.8),那么 $F(t,X)$就称是一个**动力系统**,T 称为系统的时间参数集合.

这里时间参数集合 T 有时取为 $\mathbb{R}^+=\{t\in\mathbb{R}\mid t\geqslant 0\}$,有时取作 $\mathbb{Z}^+=\{n\mid n\geqslant 0$ 整数$\}$. 相应于 $\mathbb{Z}^+$ 的动力系统称作**离散动力系统**.

动力系统的概念有两个典型的例子: 某类常微分方程的解与函数的迭代.

我们考虑常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,y),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x,y),\end{cases}\tag{1.9}$$

其中 $f(x,y)$ 及 $g(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上两个函数. 我们可以对 f 及 g 附加以适当的条件使得方程(1.9)对于任意给定的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,其初始值问题[①]

$$x(0)=x,\quad y(0)=y\tag{1.10}$$

① 这里我们没有重复写出方程(1.9),而直接称初值条件为初始问题,这只为了简便. 下同.

有唯一确定的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$. 这时我们令 $X=(x,y)$，$F(t,X)=(x(t),y(t))$. 那么条件(1.10)表明 $F(t,X)$满足(1.7)，而初始问题解的唯一性又保证了 $F(t,X)$满足(1.8)的要求. 事实上，若(x_1,y_1)是初始值问题(3.4)的解$(x(t),y(t))$在 $t=t_1$ 时值，而(x_2,y_2)是该解在 $t=t_1+t_2$ 时的值，那么(x_2,y_2)必然是初始值问题

$$x(0)=x_1,\quad y(0)=y_1 \qquad (1.11)$$

的解在 t_2 时刻的值，如图 1.1 所示. 将这一结论换成$F(t,X)$的写法就由(1.11)得到(1.8)式.

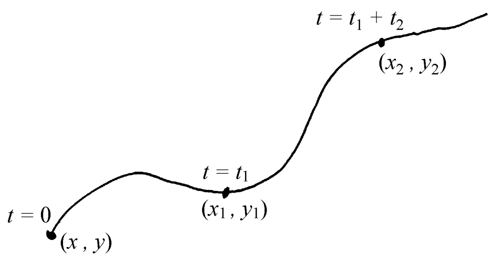

图 1.1

设 f: $A\rightarrow A$ 是集合的一个自映射. 按照前面我们约定的记法，这个映射生成了一个迭代序列$\{f^n|n=0,1,\cdots\}$. 令

$$F(n,p)=f^n(p)\quad n=0,1,\cdots,$$

并把 n 作为时间参数,立即看出

$$F(0,p)=p,\quad \forall p\in A. \tag{1.12}$$

对于任意的 n_1 及 n_2,我们有 $F(n_2,F(n_1,p))=f^{n_1+n_2}(p)$,也即

$$F(n_2,F(n_1,p))=F(n_1+n_2,p),\quad \forall p\in A. \tag{1.13}$$

这里(1.12)与(1.13)式表明这种迭代序列也是一个动力系统,只是它的时间集合不是一个连续统,而是离散的.

这样,我们把某类常微分方程的解与映射的迭代统一在动力系统这一概念之下.

应该指出,并非所有常微分方程的解都可以形成一个动力系统,我们所讨论的方程(1.9)有一个重要特征,它的右端不依赖时间 t. 如若不然,其初始值问题即使总有唯一解,其解也未必能构成动力系统.

常微分方程的右端不再含有自变量者称作自治方程. 一般说来,自治的常微分方程的解才有可能构成动力系统.

“自治性”反映在函数迭代上则是要求在迭代的过程中自始至终总是同一个映射,也就是说迭代函数不可随时间而更改.

设 $F(t,X)$ 是一个动力系统,其时间参数集